

聴覚障害者と論理

筑波技術大学産業技術学部産業情報学科

馬目洋一

要旨：暗黙の論理と条件論理演算について報告する。暗黙の論理とは人が無意識のうちに使う論理である。条件論理演算に関しては、数学的方法とその公式を提案する。

キーワード：無定義論理演算子、主加法標準形、ド・モルガンの法則、モーダスポネンス、トートロジー、双対性

1. はじめに

聴覚障害者は論理的でないという意見がある。その理由として論理の中心となる因果関係において、聴覚障害者は原因を聞いてから結果を聞くというような時間経過を必要とする言語の特性に対応しにくいからだという意見がある。

本報告では、最初に、そのような意見には根拠がないことを論理的に示した。その次に、その説明に使った条件論理演算子の取扱いについて考察したものを提示した。

この説明に使う論理式について、ここで簡単にふれておく。

日常の言葉では、因果関係に「ならば」を使っている。「風が吹けば、桶屋が儲かる」とは、「風が吹く“ならば”、桶屋が儲かる」という意味である。この「風が吹く」という事象から、「桶屋が儲かる」という事象までの推論過程には、失明者、角付け、三味線、猫、鼠などが介在するが、最も典型的な推論形式は三段論法の肯定式 (modus ponens) である。

これは、事象 P と事象 Q の間に「 P ならば Q 」という因果関係があるときに、事象 P が起きることによって、事象 Q も起きるといふ推論形式である。「風が吹く」を P で表わし、「桶屋が儲かる」を Q で表わし、「ならば」といふ論理語を「 \rightarrow 」で表わすと、「風が吹くならば、桶屋が儲かる」といふ論理式は「 $P \rightarrow Q$ 」のように表わすことができる。この「 $P \rightarrow Q$ 」が真であるときに、真なる P が起きれば、結果として真なる Q が起きることを次のように表わし、これを肯定式 (modus ponens) と呼ぶ。

$$P \rightarrow Q, P \therefore Q$$

「風が吹くならば、桶屋が儲かる」は、ほとんど真でないので、結果の「桶屋が儲かる」は妥当な推論結果にはならない。しかしながら、この肯定式

(modus ponens) という推論形式自体は常に真であるので、数学などでは関数の定義から関数値が求まる様子を次のように説明している。

$$f : P \rightarrow Q, x \in P \therefore f(x) \in Q$$

2. 暗黙の肯定式

聴覚障害者に限らず人間は暗黙のうちに肯定式 (modus ponens) が使えることを示すことにする。

2.1 論理記号について

最初に論理記号の約束をしておく。

論理記号 0 は、論理値の「偽」を表わす。

論理記号 1 は、論理値の「真」を表わす。

論理記号 \wedge は、論理語「かつ (and)」を表わす論理演算子である。

論理記号 \vee は、論理語「または (or)」を表わす論理演算子である。

論理記号 \sim は、論理語「ない (not)」を表わす論理演算子である。

論理記号 \rightarrow は、論理語「ならば」を表わす論理演算子であり、条件論理演算子とも呼ばれる。

論理記号 \Leftrightarrow は、論理語「常に等しい」を表わす論理恒等記号である。

なお、恒等的に等しいことを強調する必要のないときは、単に $=$ を使うことにする。

また、 \wedge は論理積とも呼ばれ、数学の乗算記号 \times に対比できるので、 \cdot で表わしたり、省略できることにする。

次に \wedge , \vee , \sim , \rightarrow の演算例を示す。

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$$

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1$$

$$1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1$$

$$\sim 0 = 1, \quad \sim 1 = 0$$

$$0 \rightarrow 0 = 1, \quad 0 \rightarrow 1 = 1$$

$$1 \rightarrow 0 = 0, \quad 1 \rightarrow 1 = 1$$

$1 \rightarrow 0 = 0$ が示すように、「 P ならば Q 」は、 P が真で Q が偽のときのみ偽になる。

2.2 暗黙の“ならば”

人間は無意識のうちに三段論法の推論をおこなっていることを示す。

ここでは三段論法の推論形式として前述の肯定式 (modus ponens) を取り上げ、これを再確認しておくことにする。

$$P \rightarrow Q, \quad P \quad \therefore Q \quad (1)$$

この式 (1) は、 $P \rightarrow Q$ が真であり、かつ P が真であるならば Q になることが常に真であることを意味している。このことを全て論理式で表わすと次のようになる。

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q \Leftrightarrow 1 \quad (2)$$

この式 (2) は恒真式 (tautology) である。

伝統的な三段論法を確認したので、次に新しく暗黙の三段論法について考えることにする。

ある人が事象 P を見たとする。そして事象 Q も見たとする。この人は論理的なことに関心がないので事象 P と事象 Q の間に因果関係を考えなかったとする。ただ、漠然と事象 P と Q が並んでいるように感じたとする。

このように因果関係を認識しない人でも、過去に事象 P があって事象 Q があったことを覚えている人は、新たに事象 P を見ると、事象 Q が起きるのではないかと考えることはありえる。

これを式 (1) にならって、表現すると次のようになる。

$$P \quad Q, \quad P \quad \therefore Q \quad (3)$$

$P \quad Q$ は並んでいるだけで、その間に“ならば”という概念が無いものとする。しかしながら、語ることの出来ない論理語が存在するはずである。この論理語の論理演算子として、とりあえず全く無定義な記号 \circ を使ってみる。これを式 (1) にならって、表現すると次のようになる。

$$P \circ Q, \quad P \quad \therefore Q \quad (4)$$

この式 (4) を式 (2) にならって表現するとつぎのようになる。

$$(P \circ Q) \wedge P \rightarrow Q \Leftrightarrow 1 \quad (5)$$

式 (5) を使って、無定義演算子 \circ の性質を調べることにする。

最初に式 (5) を次のように書き直す。

$$\sim ((P \circ Q) \wedge P) \vee Q \Leftrightarrow 1 \quad (6)$$

式 (6) にド・モルガン (De Morgan) の法則を適用する。

$$\sim (P \circ Q) \vee \sim P \vee Q \Leftrightarrow 1 \quad (7)$$

$P \circ Q$ における P と Q の未知の関係を、関数名を f とした論理関数 $f(P, Q)$ で表現することにする。

$$P \circ Q = f(P, Q) \quad (8)$$

式 (8) の右辺を主加法標準形に展開する。(主加法標準形の各項の論理記号 \wedge は省略する)

$$\begin{aligned} P \circ Q &= f(0, 0) \sim P \sim Q \vee \\ &f(0, 1) \sim P Q \vee \\ &f(1, 0) P \sim Q \vee \\ &f(1, 1) P Q \end{aligned} \quad (9)$$

式 (9) を式 (7) に代入すると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} &\sim f(0, 0) \sim P \sim Q \vee \sim f(0, 1) \sim P Q \vee \\ &\sim f(1, 0) P \sim Q \vee \sim f(1, 1) P Q \vee \\ &\sim P \vee Q \Leftrightarrow 1 \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) において、第 1 項の $\sim f(0, 0) \sim P \sim Q$ は、第 5 項の $\sim P$ に含まれるので省略できる。また、第 2 項の $\sim f(0, 1) \sim P Q$ も、第 5 項の $\sim P$ に含まれるので省略できる。さらに、第 4 項の $\sim f(1, 1) P Q$ は、第 6 項の Q に含まれるので省略できる。

その結果、次のような式に整理できる。

$$\sim f(1, 0) P \sim Q \vee \sim P \vee Q \Leftrightarrow 1 \quad (11)$$

式(11)が真であるためには、たとえ第2項と第3項が偽であっても、第1項の $\sim f(1,0)P \sim Q$ における $\sim f(1,0)$ が真であればよい。

$$\sim f(1,0) \Leftrightarrow 1 \quad (12)$$

式(12)を書き直すと、次のようになる。

$$f(1,0) \Leftrightarrow 0 \quad (13)$$

式(13)の論理関数値は、 P が真で Q が偽のときに偽になることを示している。そして、このような関係は、次のような論理語“ならば”の関係であることが分かる。

$$f(1,0) = 1 \rightarrow 0 = 0 \quad (14)$$

これで未知の論理関数 $f(P,Q)$ は $P \rightarrow Q$ であることが分り、その結果、無定義論理演算子 \circ は、 \rightarrow と同じであることが分かった。

$$P \circ Q = P \rightarrow Q \quad (15)$$

以上によって、聴覚障害者によらず誰でも暗黙のうちに三段論法の肯定式(modus ponens)を使えることが分かった。

これは、まさにマイケル・ポラニー (Michael Polanyi) が言った「我々は語ることができるより多くのことを知ることができる」ということを示している。

3. \rightarrow について

コンピュータ教育において、ハードウェアの教育ではブール代数を使う事が多い。このブール代数ではAND、OR、EOR、NOT、NAND、NORを使うが、 \rightarrow はほとんど使わない。一方、ソフトウェアの教育では、プログラミング言語において条件文の理解が重要になる。条件文の代表であるif文などは、まさに \rightarrow そのものである。この \rightarrow を他の論理語と組み合わせて使えるよう教育すれば、複雑なプログラムも容易に作成できるようになる。また、for文やwhile文などの理解も容易になる。

3.1 \rightarrow は指数演算に似ている

ブール代数などで、論理の \wedge は数学の乗算 \cdot に対応し、論理の \vee は数学の加算 $+$ に対応することはよく知られている。

ここで、論理の \rightarrow の演算と数学の指数演算の関係に注目してみる。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 0 &= 1 & \dots\dots & 0^0 = 1 \\ 0 \rightarrow 1 &= 1 & \dots\dots & 1^0 = 1 \\ 1 \rightarrow 0 &= 0 & \dots\dots & 0^1 = 0 \\ 1 \rightarrow 1 &= 1 & \dots\dots & 1^1 = 1 \end{aligned}$$

論理値の0と1を数値の0と1として考えると、 \rightarrow の論理演算は指数演算に対応することが分かる。

3.2 指数法則と論理式

論理の $A \rightarrow B$ は数学の B^A に対応していることが分かった。

論理式を数式に変換するときは、項を入れ換えて \rightarrow を \uparrow にして、それから指数形式に直せば分かりやすい。

例えば、 $A \rightarrow BC$ は $BC \uparrow A$ としてから、 $(BC)^A$ とすればよい。 $(BC)^A$ は指数法則より、 $B^A C^A$ となるので、論理式に戻すと $(A \rightarrow B)(A \rightarrow C)$ となる。(ただし、乗算の \cdot と論理積の \wedge は省略している)

このことから、次の論理式が得られる。

$$A \rightarrow BC = (A \rightarrow B)(A \rightarrow C) \quad (16)$$

$AB \rightarrow C$ のばあいは $C \uparrow AB$ としてから、 C^{AB} とすればよい。指数法則により C^{AB} は $(C^A)^B$ または $(C^B)^A$ となる。それぞれを論理式に戻すと次のようになる。

$$\begin{aligned} (C^B)^A &\doteq A \rightarrow (C^B) \\ &\doteq A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ (C^A)^B &\doteq B \rightarrow (C^A) \\ &\doteq B \rightarrow (A \rightarrow C) \end{aligned}$$

このことから、次の論理式が得られる。

$$AB \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (17)$$

$$AB \rightarrow C = B \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (18)$$

$A \vee B \rightarrow C$ のばあいは $C \uparrow (A \vee B)$ としてから、 C^{A+B} とすればよい。指数法則により

C^{A+B} は $C^A C^B$ となる。これを論理式に戻すと $(A \rightarrow C)(B \rightarrow C)$ となる。(論理記号の \vee は論理和とも呼ばれ、数学の $+$ に対応している。)

このことから、次の論理式が得られる。

$$A \vee B \rightarrow C = (A \rightarrow C)(B \rightarrow C) \quad (19)$$

3.3 論理の指数法則の拡張

\rightarrow の \vee に対する分配律に似た次の式は数学の指数法則との対比からは導くことができない。

$$A \rightarrow B \vee C = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \quad (20)$$

また、式(17)と式(18)の別形式である次の論理式も導くことができない。

$$AB \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \quad (21)$$

論理の世界には双対性 (duality) がある。

ある論理式が成立するならば、その式の \wedge を \vee に変え、 \vee を \wedge に変え、1 を 0 に変え、0 を 1 に変え、そして論理変数だけはそのままにしておけば、そのように変えた式も成立する。なお、論理変数も否定すればド・モルガンの法則になる。

例えば、 $\sim A \vee A = 1$ (排中律) の双対な式は $\sim A \wedge A = 0$ (矛盾律) になる。

この双対性を論理の指数法則にも適用してみる。 \cdot を $+$ に変え、 $+$ を \cdot に変える。

数学の $(B \cdot C)^A = B^A \cdot C^A$ が成立するならば、形式的に双対な $(B + C)^A = B^A + C^A$ を経て、対応する論理の指数法則として $(B \vee C)^A = B^A \vee C^A$ が成立すると考える。

この拡張した論理の指数法則を認めれば、これによって、式(20)を導くことができる。

同様に、数学の $C^{A+B} = C^A \cdot C^B$ が成立するならば、形式的に双対な $C^{A \cdot B} = C^A + C^B$ を経て、対応する論理の指数法則として $C^{A \cdot B} = C^A \vee C^B$ が成立すると考える。

この拡張した論理の指数法則を認めれば、これによって、式(21)を導くことができる。

3.4 論理の指数法則のまとめ

以下の式は数学の公式ではなく、論理のための公式である。数学の指数法則との違いを強調するためにあえて \wedge を \cdot で表わし、 \vee を $+$ で表している。

$$(X \cdot Y)^a = X^a \cdot Y^a \quad (22)$$

$$(X + Y)^a = X^a + Y^a \quad (23)$$

$$X^{a+b} = X^a \cdot X^b \quad (24)$$

$$X^{a \cdot b} = X^a + X^b \quad (25)$$

式(23)と式(25)は、論理の世界だけで成立し、数学では成立しない。

この式は次のように一般化することもできる。

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^a = X_1^a + X_2^a + \dots + X_n^a \quad (26)$$

$$X^{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = X^{a_1} + X^{a_2} + \dots + X^{a_n} \quad (27)$$

4. おわりに

本報告の暗黙の肯定式 (modus ponens) は平根孝光先生が主催していた談話会で、「聴覚障害者は論理的でないか」という疑問にたいして、大沼直紀先生がそれを否定したことがきっかけになって考えたものである。

無定義論理演算子のアイデアとその取り扱いについては恩師の故後藤以紀先生とそれを継承している大竹政光先生 (明治大学) に負うものである。

“ならば” 演算子の指数的扱いは、かつて数学雑誌 (たぶん数学セミナー) で読んだ記憶があり、あらためて、これを検証したものである。

論理の指数法則の拡張は、学生の特別研究で論理パズルの論理的解法を指導しているときに \rightarrow 演算の教育が必要になり、そのときの教育方法を整理したものである。なお、式(26)と式(27)は、本学がはじめて報告する公式であると思える。

Hearing-impaired Persons and Logic

MANOME Yoichi

Department of Industrial Information, Faculty of Industrial Technology,
Tsukuba University of Technology

Abstract: This report describes two things, tacit logic and conditional operations. Tacit logic is implicit logic which all men use unconsciously. On conditional operation, mathematical methods and new formulas for them are proposed.

Keywords: Undefined logical operator, Principal disjunctive canonical (normal) form, De Morgan's law, Modus ponens, Tautology, Duality