

複素ヒルベルト空間の導入による障害教育問題の解明

聴覚部 電子情報学科 情報工学専攻 小池将貴

要旨：学習意欲の不足する問題学生が、経験的に新生生の10～20%の割合で発生する。その対応に関与する人々として、教官・問題学生・級友・肉親・同僚教官の5つの対象を設定し、関与者相互の人間関係という観点から解決の糸口を探ることにした。関与者同士の熱意が双方向に同程度という対称的な人間関係の場合には、その研究方法論は確立されている。しかし、一方が熱心であるのに他方はそれほどではないという非対称な人間関係を分析研究する方法論については、従来その決め手が無かった。今回は複素ヒルベルト空間の導入による新手法を用いて問題解明を試みた。関与者相互の非対称な親近度データにこの新手法を適用すると、関与者の布置図を作成することができる。親近度データを多様に設定して布置図の作成を繰り返すという反復フィードバック（教育シミュレーション）により、問題解決の示唆を得ることができた。

キーワード：障害教育 エルミート行列の固有値分解 S言語 マクロプログラム 教育シミュレーション

1. はじめに

聴覚障害者の高等教育の場であるこの短大に、毎年新生を迎えて今年で第8期生になる。その間の経験によると、新生生の10～20%の割合で学習意欲が不足する問題学生が発生し、その対応に教官は追われてきた。

2. 問題

ここでは視点を变えて、教官・問題学生・級友・肉親・同僚教官の5つの対象を設定し、これらの関与者相互の親近度データから全体の構造を引き出すことによって、問題解明の糸口をつかめないものか検討する。

3. 方法

3.1 対称な親近度の場合

方法論としては、問題に関与する対象相互の親近度データに基づいて対象の布置図を作成し、その遠近の位置付けから問題の構造を把握し対応策を練るというアプローチを採る。

例えば、教官の授業改善方策を探る問題¹⁾では、「もっと手話を覚えてほしい」、「例をあげて説明してほしい」などの学生要望意見52件を対象に選んだ。対象相互の親近度データの設定は、任意の意見 i, j 同士を一对比較させ、大半の学生が似ていると評価すれば親近度 e_{ij} を高く設定した。この例の場合では、親近度データは対称である ($e_{ij}=e_{ji}$)。このような対称な親近度データに基づいて対象の布置図を得る方法は、数量化理論Ⅳ類、ヤング・ハウスホルダーの定理、クラスカルの多次元尺度構成法など多彩な方法論が整っている。

3.2 非対称な親近度の場合

ところが、親近度が非対称になる場合がある。卑近な例として、かつての日本の家族制度における嫁・姑の問題を取り上げてみよう。長男が嫁を娶ると、姑（長男の母）・小姑（長男の姉妹）が嫁を快く思わない場合が多く、その関係の典型例は、表1ようになる。

表1 非対称な親近度行列の例

to \ from	長男	姑	小姑	嫁
長男	5	3	2	5
姑	5	5	5	1
小姑	4	5	5	1
嫁	5	3	3	5

表1では、長男が嫁を、嫁が長男を思いやる気持ちは親近度の最高点（5点）を獲得し、対称である。しかし、嫁が姑や小姑に対して抱く親近度は普通（3点）であるのに、姑や小姑の嫁への親近度は最低（1点）であり、非対称である。このように対象間の親近度が非対称なデータに基づいて、各対象を多次元空間内の点として布置する方法論は、従来は確立されていなかった。

3.3 非対称な親近度を扱う新手法

ところが、最近、非対称な親近度行列と一対一に対応するエルミート行列を構成し、その各要素が複素ヒルベルト空間のエルミート形式の関数であるという仮定を置

いて、観測結果の非対称親近度行列の情報をできるだけ満たすように、各対象を多次元空間内の点として位置づける新しい方法論がエルミート形式モデルとして提案された³⁾。その核心となる数学的構造は以下のとおりである。

3. 4 新手法の数学的構造

N 人の対象間の非対称親近度行列

$$S=(S_{jk});j,k=1,2,\dots,N$$

が与えられたとする。

行列 A の転置行列を tA と表すとして、

$$A=\frac{1}{2}(S+{}^tS)$$

$$B=\frac{1}{2}(S-{}^tS)$$

と定義すると、行列 A は対称行列 (${}^tA=A$) であり、行列 B は歪対称行列 (${}^tB=-B$) である。

そして、元の行列 S は、

$$S=A+B$$

のように、対称行列と歪対称行列との和として分解表示することができる。

さて、純虚数を i として、

$$H=A+iB$$

という複素行列を定義すると、これはエルミート行列 ($H^*=H$) である。ここで、 H^* は共役転置行列を表す。

さらに、エルミート行列に対して固有値分解を施すと、行列は、その固有値と固有ベクトルとによって、次のように分解表示される。

$$H=\sum_i \lambda_i u_i u_i^*$$

明らかに、固有値 λ と固有ベクトル u とによって、 H が完全に復元される。さらに、エルミート行列 $H=A+iB$ の実数部 A と虚数部 B とによって元の行列 S が復元されることも明らかである。

従って、エルミート行列 H の固有値分解は、元の行列 S に内在する対象間の関係を解明するための有力な方法論となる。

3. 5 具体的な適用法

このエルミート形式モデルを具体的に適用するには、次の2つの条件を満たすことが望ましい。

(i) 親近度データは、比率尺度を採用すること。なぜならば、親近度データに付加定数を加・減算して原点を移動すると、結果としての布置図が変化してしまうからである。

(ii) エルミート行列の固有値 λ は実数である³⁾。そのエルミート行列 H は、正・半定符号であること。もちろん、負・半定符号や不定符号でも差し支えないが、結果として得られる布置図の解釈が煩雑になる。

以上の条件を勘案して、今回の研究調査で採用したエルミート形式モデルの具体的な適用法としては、

(a) 親近度は、1単位の大きさを想定しできるだけその倍数になるように設定する。

(b) こうして非対称親近度行列データ S を作成し、それに基づいてエルミート行列 H を構成する。

(c) エルミート行列 H の固有値の符号が正かゼロ(正・半定符号)をほぼ満たしていることを確認し、最大の固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル u_1 (ベクトルの N 個の成分は複素数である)を取り出して、複素平面(二次元空間)上に N 人の対象を位置づける。

(d) その布置図から、対象間の関係を解明する。

4. 計算プログラムと例解計算

非対称親近度行列を入力データとして、エルミート行列 H の固有値と固有ベクトルとを出力するプログラム(複素行列の固有値分解プログラム)をデータ解析言語 $S-PLUS$ でコーディングして、分析に活用した。

ここで、表1のデータをこのプログラムに入力して計算したところ、固有値が、

$$15.7 \quad 5.1 \quad 0.2 \quad -1.0$$

のように求まった。正・半定符号条件をほぼ満たしているので、さらに、最大の固有値15.7に対応する固有ベクトル(成分は複素数)を取り出し、複素平面上に4成分(長男、姑、小姑、嫁)の対象を布置した結果を得た。これを図1に示しておく。姑と小姑とが相思相愛の長男と嫁との間に立ちはだかっている様が見て取れよう。

5. 新手法による問題解明の試み

5. 1 問題の関与者

第2章で提起した問題を、第3. 5節で提示したエルミート形式モデルの具体的な適用法により解明する。まず、問題解明のための関与者として、以下の5つの対象を選んだ。

教 官：問題学生を抱えてその対応に苦慮している当該教官である。

問題学生：学習意欲が不足する学生である。

級 友：同一クラスの学友である。

肉 親：問題学生の肉親(親、兄弟姉妹等)である。

同僚教官：問題学生は、すべての授業に意欲を示さな

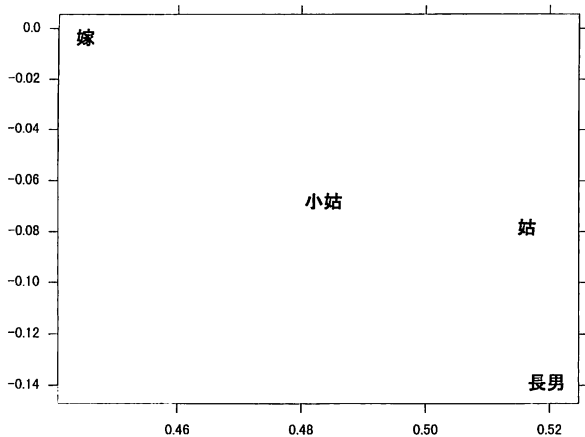


図1 親近度行列(表1)に基づく布置図

いわけではなく、参加する授業もある。そのような授業を担当する教官である。

5. 2 親近度行列からの布置図作成

関与者相互の親近度の例を表2に示す。

表2 関与者の親近度行列

to from	教官	学生	級友	肉親	同僚
教官	5	5	4	4	4
学生	1	5	2	2	3
級友	3	3	5	1	4
肉親	4	5	1	5	1
同僚	3	4	4	1	5

表2は、筆者がこれまでの教育経験を振り返り、当該教官の立場に立って想定した仮定の親近度である。そのように設定した理由を以下に説明する。

まず、関与者自身の自己親近度は最大の5と設定してある。

教官は、問題学生に対しては学習意欲を引き出そうとして最大の親近度(5)をもって接する。また、級友や問題学生の肉親にも普通以上に気を配る(親近度4)。同僚教官にも、問題学生についての情報を得るために密接に接触する(親近度4)。

学生は、当該教官の授業に欠席したり、遅刻したりする(親近度1)。自己の殻に閉じこもって、級友や肉親とも交流が少ない(親近度2)。ただし、特定の授業だけは出席する(その授業を担当する同僚教官への親近度は普通程度の3)。

級友は、当該教官の授業には出席しているのであるか

ら、親近度は普通である(親近度3)。問題学生に対しても普通に接している(親近度3)。問題学生の肉親に対してはまったく関心が無いのは当然である(親近度1)。

肉親は、当該教官から相談を受けているので、教官には親近度4、問題学生には、「しっかり勉強せよ。」と濃密な接触を行う(親近度5)。

同僚教官は、他の関与者に対して常識的な対応をしている。

表2の非対称な親近度データを上述の *S-PLUS* のプログラムに入力して計算した。固有値は、

17.4 5.5 1.9 0.7 -0.5

のように求まった。正・半定符号条件をほぼ満たしているため、最大の固有値に対応する固有ベクトルを用いて布置図を図2のように得た。

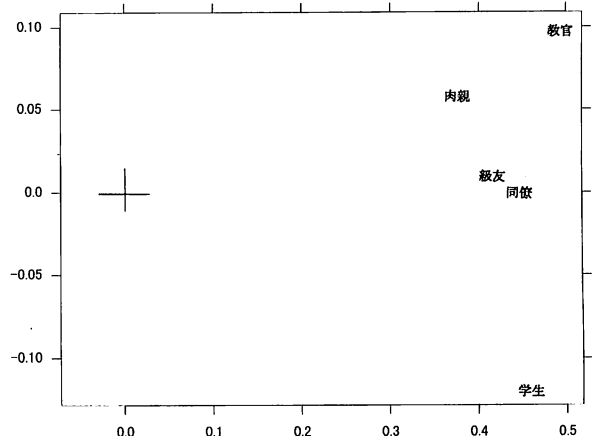


図2 親近度行列(表2)に基づく布置図

図2から、教官と問題学生とは遠く離れているが、その中間で両者を結びつける働きをしてくれそうな者は、肉親や級友よりも、むしろ同僚教官であることが示唆される。

5. 3 教育シミュレーション

表2では、関与者はすべて自分自身に対して最大の親近度(5)をもつとした。もしも問題学生が聴覚障害を受容し難く、更に教官が追い討ちをかけるように、「他の学生が分かることが理解できないはずが無い。」として、逆に問題学生が自己親近度を最低(1)に感じるようになった場合には、どうなるであろうか。

もちろん、そのような実験は現実の教育の場では許されないが、コンピュータ・シミュレーションは可能である。表2のデータにおいて、学生の自己親近度データのみを5から1へ変えて、計算したところ、固有値は、

16.6 5.4 1.2 0.3 -2.4

のように求まった。正・半定符号条件をほぼ満たしてい

るので、布置図を図3のように得た。学生は教官からますます離れてむしろ肉親に近寄るだけであることが示唆される。

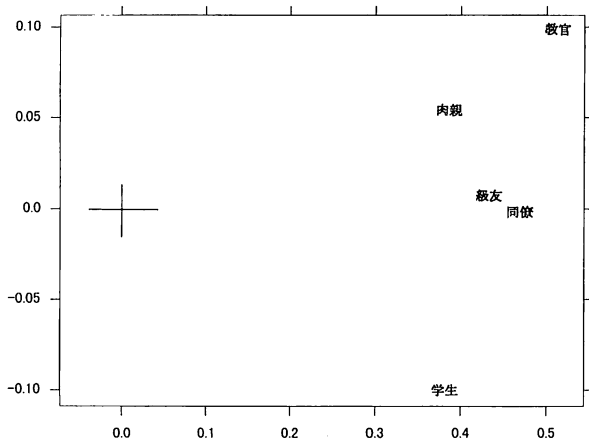


図3 親近度データの変更による布置図の変化

6. 考察

非対称な親近度データに基づいて対象の布置図を作成し、その遠近の位置付けから問題の構造を把握することを試みてきた。

さらに興味深いのは、布置図における対象同士の遠近情報が問題の構造把握に役立つだけでなく、角度情報も役立つということである。

すなわち、非対称親近度行列 $S=A+B$ における対称行列 A と歪対称行列 B のそれぞれの第 jk 成分は

$$a_{jk} = \lambda_1(r_j r_k + c_j c_k)$$

$$b_{jk} = \lambda_1(c_j r_k - r_j c_k)$$

のように近似的に表すことができる。ここで、 λ_1 は、エルミート行列 H の最大の固有値である。 r_j, c_j は、対応する固有ベクトル u_1 の第 j 成分の実数部と虚数部である。

親近度の対称部分を表す a_{jk} の右辺の括弧内は、対象 j の布置図(二次元複素平面)上の位置ベクトル (r_j, c_j) と対象 k の位置ベクトル (r_k, c_k) との内積を意味する。

ここで興味深いのは、親近度の非対称部分を表す b_{jk} の右辺の括弧内は、対象 j の位置ベクトル (r_j, c_j) と対象 k の位置ベクトル (r_k, c_k) とから合成される行列の行列式の値であり、両ベクトルの張る平行四辺形の面積を表す。

従って、対象 j の対象 k に対する親近度 S_{jk} が非対称な

らば、両位置ベクトルは平行四辺形の面積を大きくするために扇状に広がる(角度が大きくなる)。逆に、対称ならば、両位置ベクトルは同一の向きに重なる(角度が小さい)。

図2では、教官と問題学生は非対称なので、教官と問題学生との位置ベクトルは開いている。逆に、教官と肉親とは対称なので、両位置ベクトルはほぼ同一方向に重なる。級友と同僚教官も対称なので同一方向に重なっている。

7. おわりに

非対称な親近度で表される現象は、さまざまな人間関係のみならず、国の輸出入関係・専門誌の引用と被引用関係・産業の連関関係など多く見受けられる。このような多様な場面の中には、当然、障害教育も含まれる。今後は、そのような障害教育の場面にこの新手法の適用を図っていきたい。

参考文献

- 1) 小池将貴：「聴覚障害者高等教育の場における自己点検・評価」, 筑波技術短期大学テクノレポート, 第2巻, pp.83-89 (1995) .
- 2) 千野直仁：「非対称多次元尺度構成法」, 初版, pp.62-63; pp.139-161 ; pp.160-161(1997), 現代数学社.
- 3) 篠崎寿夫：「ヒルベルト空間上の線形作用素入門」, 初版, pp50-54; pp107-108(1996), 現代工学社.

Title: A trial to shed light on the education of the handicapped through the complex Hilbert space

Summary: The aim of this study was to clarify the human relations among a teacher ,a problem student and his or her concerned. The relationship between a pair of persons is not always symmetric. There are many cases where the former person likes the latter ,but the latter may dislike the former. In order to solve the asymmetric proximity the asymmetric multidimensional scaling method was successfully applied to the education systems of the handicapped.

Keywords: education of the handicapped ; eigenvalue-eigenvector decomposition of Hermitian matrix; S Language ; macro ; simulation of education systems