

聴覚障害学生が使う数学的問題解決方略：その特徴と困難性

森本 明

聴覚障害関係学科 一般教育等

要旨：本稿の目的は、数学的問題解決で聴覚障害生徒が使う方略について、その特徴と困難性を同定することである。そのために、聴覚障害短大1年生33名と健聴大学1年生45名を対象として、一般化の考えを必要とする「電話線の問題」で学生が使う問題解決方略について調査を行った。

その結果、「電話線の問題」で聴覚障害学生が使う問題解決方略の特徴と困難性が同定された。特に困難性として、次のことが示唆された；

- (1) 問題文に示された事実を的確に把握し、問題場面を想定すること
- (2) 一般のときについて式で表すこと
- (3) 再度問題場面にもどりよりよく問題を理解し、事象を反省的に考察すること

キーワード：問題解決，方略，一般化

1. はじめに

数学的知識は教師によって注入されるものではなく、社会的な相互作用を通して生徒自身により構成されるものであるとする知識観（例えば、Van Oers, 1996）がある。この立場からは、生徒が数学的知識を獲得するためには、教室におけるコミュニケーション活動が不可欠であるということが示唆される。

算数・数学の指導で多くみられる問題解決型の授業は、この教室におけるコミュニケーション活動を重視した指導実践の一つであるといえる。問題に対して生徒たちが自由に思考し、多様なアイデアを出し合い、教師と生徒、生徒どうしが話し合い、お互いのアイデアを高めあう、その活動自体が学習の中心的役割を担う。こうした活動を通して、生徒がものごとについて数学的に考えることができるための知識やスキル、数学的に考えることのよさを獲得することが期待される。

聾学校においてもこうした問題解決型の数学の授業が実践されてきている。しかしながら、生徒たちが数学的に考えることができるための知識やスキル、数学的に考えることのよさを獲得できているかという点必ずしも十分ではない。特に、手続きや規則を適用することなどの道具的理解は獲得できても、手続きや規則の意味を知ることなどの関係的理解が十分ではない生徒が多いことは周知の通りである（例えば、四日市, 1991；森本, 1997）、関係的理解を促進するための一つの方策として、教室におけるコミュニケーション活動を重視した問題解決型の授業を適切に計画し実践することが考えられる。

聴覚障害生徒を対象とした数学の指導において、問題解決型の授業を計画し実践する際にどのような点に留意すべきかに関わり、数学的問題解決で聴覚障害生徒が使う方略について、その特徴と困難性を同定することが本稿の目的である。特に、大学1年生を対象に調査を行うことで、小学部（小学校）から高等部（高等学校）まで算数・数学の指導を受けてきたにも関わらず解消されにくい困難性について検討することとした。

2. 研究方法

2.1 調査対象

調査対象は、聴覚障害学生及び健聴学生である。聴覚障害学生は、工学専攻の国立短期大学聴覚部一年次に在籍する学生33名である。健聴生徒は、経済学専攻の私立大学一年次に在籍する学生45名である。

2.2 調査問題

調査問題は数学的問題解決に関する日米共同研究で使われた「電話線の問題」をもとに作成した（三輪, 1992）。問題は次の通りである。

家と家の間を直接電話で結ぶことにします。いま、どの家とどの家の間にもちょうど1本ずつの電話線をつけることにします。次の問いに答えなさい。

- (1) 家の数が6軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい。
- (2) 家の数が20軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい。
- (3) 家の数が n 軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい。

2.3 手続き

調査は、質問紙による。質問紙による調査は1997年9

月に実施した。聴覚障害学生に対する調査並びに健聴学生に対する調査は、共に数学の授業時間に実施した。

解答時間は上限20分に設定した。回収した回答を分析のための資料とした。その際、対象とした学生を、便宜上聴覚障害学生をA群 (N=33)、健聴学生をB群 (N=45) とし、問題の正答率の検討及び比較、使われた問題解決方略の分析及び比較を行った。

3. 結果

3.1 正答率とその比較

3.1.1 正答率

小問1については15本、小問2については190本を正答と判断し、それ以外の回答を誤答、また何も書かれていないものを無答と判断した。また、小問3については、 $n(n-1)/2$ を正答、それ以外を誤答、また何も書かれていないものを無答と判断した。

A群及びB群の正答率は以下の通りである(表-1)。

3.1.2 正答率の比較

表-1 各小問に対する正答率

	正当数	誤答数	無答数	正答率(%)
小問1 A (N=33)	23	10	0	69.7
B (N=45)	45	0	0	100
小問2 A (N=33)	22	11	0	66.7
B (N=45)	38	7	0	84.4
小問3 A (N=33)	8	22	8	24.2
B (N=45)	20	17	2	44.4

小問1「家の数が6軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい」では、A群の72.7%が正答と判断された。それに対し、B群ではすべてが正答と判断された。小問2「家の数が20軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい」では、A群66.7%が正答と判断された。それに対し、B群の84.4%が正答と判断された。小問3「家の数がn軒のとき、電話線の数は全部で何本か求めなさい」ではA群の24.2%が正答と判断された。それに対し、B群の44.4%が正答と判断された。このように、小問1と2については、A群、B群ともに過半数が正答であるが、小問3の正答は半数に満たない。また、各小問のA群とB群の正答率を比較すると、小問1から3全てで、A群よりもB群の正答率が高い。

次に小問1から3の正答通過率についてA群とB群を比較すると小問1ではB群の方が高く、小問2ではA群の方が高い、小問3ではB群の方が高い。小問1の正答率は、A群で72.7%、B群で100%とA群よりB群の方が高い。また、小問1で正答した回答のうち小問2でも正答した回答の占める割合は、A群で95.7%、B群で

86.7%とB群よりもA群の方が高い。さらに、小問1と2で正答した回答のうち小問3でも正答した回答の占める割合は、A群で40.9%、B群で51.2%とA群よりもB群の方が高い。

3.2 使われた方略とその比較

学生の回答では、多様な表記が使われている。図、文章、式であり、その使い方は様々である。そこで、使われた表記を図的表記と言語的表記に分け、さらに図や言語の性質に基づき分類した(表-2, 表-3)。この分類を手がかりに、学生が使う問題解決方略を分析した(長崎, 1992)。

3.2.1 A群で使われた方略

①小問1

正答と判断された23回答のうち、何らかの図的表記が使われたものは15回答(65.2%)である。つまり、半数以上の回答で図が使われている。図が使われた15回答のうち、家を表すために家の絵を描くなど問題場面を具体的に描いたものは2回答(13.3%)、ある観点で抽象し問題場面全体を図で表したと判断されるものが11回答(73.3%)、ある観点で抽象し問題場面の一部分のみを図で表したと判断されるものが3回答(20.0%)である。つまり、図的表記のうち、ある観点で抽象し問題場面全体を図で表すことによって問題場面を想定する回答が多い。

言語的表記では、式を使ったものが最も多く、23正答のうち、13回答(56.5%)である。つまり、言語的表記では式を使うことが多いことがわかる。使われた式のうち、乗法式を使わず加法式を使ったものが9回答、乗法式を使ったものが4回答である。つまり、式を使った回答のうち、加法式を使った回答が多い。言語的表記で次に多いのが、数える方略を使う回答で、23正答中8回答(34.8%)である。文章を使ったものは、23正答のうち2回答(8.7%)である。

誤答では、誤答と判断された10回答のうち、何らかの図的表記が使われたものは8回答である。誤答のうち最も多いのが6軒の家を直列に電話線で結び植木算的に数えたものが4回答、重なりを考慮せずに計算したものが2回答、曖昧な6軒の家と電話線の図を使ったものが1回答、6軒の家の結び方が主観的であるものが1回答、である(図-1)。

②小問2

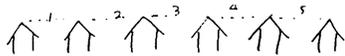
正答と判断されたものは22回答で、小問1の23回答のうち1回答を除き正答である(95.7%)。そのうち、図的表記が使われた回答はなく、すべて言語的表記による。言語的表記のうち、式を使ったものが最も多く、22正答のうち、18回答である(81.8%)。そのうち、乗法式を

使わず加法式を使ったものが10回答、乗法式を使ったものが8回答である。言語的表記のうち、文章を使ったものは、22正答のうち、1回答だけである。つまり言語的

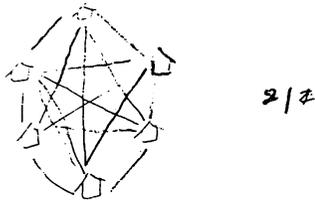
表記では式、特に加法式を使うことが多く、文章を使うことが少ない。

誤答では、小問1で正答、小問2で誤答と判断されたものは、20軒の家の組数をすべて書きあげようとしたが途中で断念した1回答である。

① 6軒の家を直列に電話線で結ぶ図



② 曖昧な6軒の家と電話線の図



③ 6軒の結び方が主観的な図

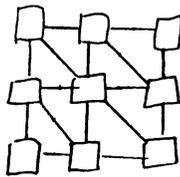


図-1 小問1でA群誤答学生が作った図的表記

表-2 小問1で正答A群学生が使う問題解決方法

使われた図的表記	人数	使われた言語的表記				正答 (○ × 無)					
		数える	列挙	算式	式	口		口			
						○	×	○	×		
A. 「6軒の家と電話線」	1	○				1	0	0	0	1	0
	1			○	○	1	0	0	1	0	0
B. 「6点と線」	1			○		1	0	0	0	1	0
	2			○	○	2	0	0	2	0	0
	1			(公式)	○	1	0	0	1	0	0
C. 「1点から出る線」	1			○		1	0	0	0	1	0
	1			○ (数列的)		1	0	0	1	0	0
D. 「樹形」	1			○		1	0	0	0	1	0
	3			○		3	0	0	1	2	0
E. 「樹形一部略」	1			○		1	0	0	0	1	0
	2			○		2	0	0	1	1	0
F. 組数数え	1			○		0	1	0	0	1	0
G. 図なし	3			○		3	0	0	0	3	0
	1			○		1	0	0	0	1	0
	1			○ (数列的)		1	0	0	0	1	0
H. 判断不可	2					2	0	0	1	1	0

③小問3

正答と判断されたものは、小問1と2の両問正答と判断された22回答のうち11回答である。誤答と判断されたものは、残り15回答である。正答、誤答とも図的表記が使われたものはなく、全回答で言語的表記が使われている。

誤答では、15誤答のうち、どこまでの和か曖昧な加法式が使われたものが6回答と最も多い。他には、一般のときについて加法式で表すことはできるが乗法式で表すことができないもの(4回答)、無答(2回答)、誤りのある式(3回答; $n-1$, $(n-1) \times 2$, $n(n+1) \div 2$ が各1)である。

3.2.2 B群で使われた方略

①小問1

正答と判断された45回答のうち、何らかの図的表記が使われたものは39回答(86.7%)である。つまり、8割以上の回答で図が使われている。図が使われた39回答のう

表-3 小問1で正答B群学生が使う問題解決方法

使われた図的表記	人数	使われた言語的表記				正答 (○ × 無)					
		数える	列挙	算式	式	口		口			
						○	×	○	×		
A. 「6軒の家と電話線」	2	○				1	1	0	0	2	0
	1	○	○			1	0	0	1	0	0
	2			○	○	2	0	0	2	0	0
	3			○		3	0	0	1	1	1
A. 「2軒から4軒までの家と電話線」	1	○ (数列的)				0	1	0	0	0	1
	7	○				5	2	0	1	5	1
B. 「6点と線」	3	○ (数列的)				3	0	0	1	0	2
	1	○				0	1	0	0	1	0
	2	○	○			1	1	0	0	1	1
	3			○		3	0	0	1	2	0
	1			○	○	1	0	0	1	0	0
D. 「樹形」	2	○				2	0	0	0	2	0
	1	○				0	1	0	0	0	1
	2	○	○			2	0	0	1	1	0
	5			○		5	0	0	4	0	1
E. 「樹形一部略」	1			○	○	1	0	0	1	0	0
	2	○				2	0	0	0	2	0
F. 組数数え	1	○				1	0	0	0	0	0
G. 図なし	1	○				1	0	0	0	1	0
	2	○	○			2	0	0	2	0	0
	1			○	○	1	0	0	1	0	0
	1			○		1	0	0	0	1	0

ち、家を表すために家の絵を描くなど問題場面を具体的に描いたものは9回答(23.1%)、ある観点で抽象し問題場面全体を図で表したと判断されるものが28回答(71.8%)、ある観点で抽象し問題場面の一部分のみを図で表したと判断されるものが2回答(5.1%)である。つまり、図的表記のうち、ある観点で抽象し問題場面全体を図で表すことによって問題場面を想定する回答が多い。

言語的表記では、式を使ったものが最も多く、45正答のうち、23回答(51.1%)である。つまり、言語的表記では式が使われることが多い。使われた式では、乗法式を使わず加法式だけを使ったものが18回答(78.3%)、乗法式を使ったものも5回答(21.7%)である。つまり、式のうち、加法式が使われる回答が多い。言語的表記で次に多いのが、数える方略を使う回答で、45回答中19回答(42.2%)である。言語的表記のうち、文章を使ったものは、45正答のうち、14回答(31.1%)である。

②小問2

正答と判断されたものは38回答で、小問1の45正答の84.4%にあたる。そのうち、図的表記が使われた5回答である。残りはすべて言語的表記による。言語的表記では、式を使ったものが最も多く、38正答のうち34回答である(89.4%)。そのうち、乗法式を使わず加法式を使ったものが20回答(58.8%)、乗法式を使ったものが14回答(41.2%)である。つまり、式のうち加法式が使われることが多い。言語的表記のうち、文章を使ったものは、38正答のうち4回答である。

誤答では、小問1で正答、小問2で誤答と判断されたものは7回答である。そのうち最も多い回答がたし算の誤りによるもの(4)である。他には、重なり処理ができないもの(1)、無答(1)、判断不可(1)である。

③小問3

正答と判断されたものは、小問1と2の両問正答と判断された38回答のうち19回答(50.0%)である。また、小問1で正答、小問2で誤答、小問3で正答と判断されたものが1回答である。これら全20正答では、図的表記は使われていない。

誤答では、小問1と2で正答、小問3で誤答と判断された19回答で、図的表記が使われたものは1回答である。残りの18回答はすべて言語的表記による。言語的表記で最も多いものが一般のときについて加法式で表すことができるが乗法式で表すことができないもの(8回答)、次に無答(6回答)、どこまでの和か曖昧な加法式が使われたもの(2回答)、誤りのある式(2回答; $n(n+1) \div 2$ 、不適切な $S_n - S_{n+1}$ の適用、各1)である。

3.2.3 A群とB群で使われた方略の比較

①小問1

正答と判断された回答で使われた図的表記の占める割合について比較すると、A群では65.2%、B群では86.7%の回答で使われている。A群に比べ、B群の方が図的表記が使われる回数が多い。使われた図的表記の性質に関しては、A群、B群ともに、ある観点で抽象し問題場面全体を図で表すこと、家を表すために家の絵を描くなど問題場面を具体的に描くこと、ある観点で抽象し問題場面を一部分のみを図で表すこと、の順で多く、似ている。

次に正答と判断された回答で使われた言語的表記について比較すると、式が使われた回答の占める割合は、A群で56.5%、B群で51.5%と似ている。使われた式の性質に関しては、A群、B群ともに、加法式、乗法式の順で多く、似ている。しかしながら、言語的表記のうち、文章が使われた回答の占める割合は、A群で8.7%、B群で31.1%で、B群の方が高い。

誤答と判断された回答は、B群にない。A群では6軒の家を直列に電話線で結び植木算的に数えたものが多い。

②小問2

正答と判断された回答では、両群とも言語的表記による回答が多い。そのうち正答で式が使われた回答の占める割合は、A群で81.8%、B群で89.4%と両群とも高く似ている。使われた式の性質に関してもまた、加法式、乗法式の順で多く、似ている。

誤答では、小問1で正答、小問2で誤答と判断された回答は、計算の誤り以外に、A群では20軒の家の組数をすべて書き上げようとしたもの(1)、B群では重なり処理ができなかったもの(1)である。

③小問3

正答と判断された回答では、B群の1回答を除きすべての回答で言語的表記が使われた。小問1、2で正答、小問3で誤答と判断された回答のうち、A群では $(n-1) + (n-2) + \dots$ 、 $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-x)$ や $(n-1) + (n-2) + \dots + n - (n-1)$ の曖昧な加法式が使われたもの、一般のときについて加法式で表すことができるが乗法式で表すことができないもの、無答、誤りのある式 $(n-1)$ 、 $(n-1)n$ 、 $n(n+1)/2$ の順で多い。B群では一般のときについて加法式で表すことができるが乗法式で表すことができないもの、無答、 $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-m)$ や $(n-1) + (n-2) + \dots + n$ の曖昧な加法式が使われたもの、 $n(n+1)/2$ と不適切な $S_n - S_{n+1}$ の適用の誤りのある式の順で多い。一般のときについて式で表すことにおいて、両群で

多様な誤りがみられる。

4. 考察

小問1では、問題場面を理解し、家の数が6軒のときの電話線の数を求める必要がある。ここで必要な問題の理解において、聴覚障害学生の中には問題文に示された事実を的確に把握し、問題場面を想定することが難しい学生がいることが考えられる。というのも、6軒の家を直列的に結ぶ図をかくことに代表されるように、問題文に示された事実を把握するというよりもむしろ解決者自身による家と電話線の関係についての直観的あるいは主観的な見方に基づき問題場面を想定する学生がいると判断された。このことはB群ではみられないのに対し、A群の18.2%にあたる6回答にみられた。また、小問1では問題の理解や家の数が6軒のときの電話線の数を求めるために、両群で多様な図の表記が使われている。聴覚障害学生、健聴学生ともに、個々の様々な見方により多様な表記を手がかりに問題を理解し、解決を試みる事がわかる。そのうち、文章が使われる回数の占める割合はA群で比較的少ないことがわかる。つまり、文章で表現することよりも式などの他の表記による回答が多いことがわかる。

小問2では、より家の軒数が少ないときについて家の軒数と電話線の数との関係にあるきまりを発見し、そのきまりを適用する必要がある。ここで必要な、家の軒数が少ないときに家の軒数と電話線の関係にあるきまりを発見し、家の軒数が多いときに適用すること、つまり数が大きい場合について帰納的に推論することは、聴覚障害学生、健聴学生共に比較的容易であると考えられる。小問1を正答したもののうち小問2で正答した解答の占める割合は、A群で95.7%、B群で86.7%とともに高い。このように、聴覚障害学生、健聴学生ともに8割以上が正答であることから、数が少ないときに発見したきまりを大部分の学生が適用できていると考えられる。

しかしながら、家の軒数が一般のときに数が少ないときについて成り立つきまりを適用することは学生にとって難しいことが考えられる。小問3では、二つの一般化の方法がある。一つは加法式で表す一般化の方法で、家が6軒のとき $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 本、家が20軒のとき $19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = 190$ 本、家の数が一般のとき $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$ とする方法である。もう一つは、この問題の核心である、どの家からも電話線が(家の数-1)本出ていること、その結果重複して数えたことから、 $n(n-1)/2$ と乗法式で表す一般化の方法である。最終的に乗法式で表すためには、一般のときについて成り

立つ加法式から乗法式を手続的に演繹すること、あるいは再度問題面にもどりよりよく問題を理解し、事象を反省的に考察することでこの問題の核心を把握する必要がある。ところが、小問1及び小問2の、数が少ない場合、あるいは多くなった場合について正答したにも関わらず、小問3で正答できた回答の割合は低い。A群で40.9%、B群で51.2%である。仮に乗法式で表さず加法式 $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$ で表した回答を正答と判断した場合でも、正答率はA群で68.2%、B群で71.1%と小問2の数が多の場合に比べ正答率が低いことがわかる。数が多の場合について帰納的に推論できるにも関わらず、一般の場合について帰納的に推論することが難しいこと、再度問題場面にもどりよりよく問題を理解し、事象を反省的に考察することができる学生が少ないことがわかる。

5. おわりに

本調査では、問題解決方略を使うことに伴う困難性として、次のことが示唆された；(1)問題文に示された事実を的確に把握し、問題場面を想定すること(2)一般のときについて式で表すこと(3)再度問題場面にもどりよりよく問題を理解し、事象を反省的に考察すること、である。したがって、これら3点については、少なくとも数学の指導で配慮していく必要があるといえるだろう。

問題文から問題場面を想定することが難しければ、はじめは問題場面を文章で提示するのではなく、生徒にとってより具体的で、より親しみがもてる表現や内容で提示することが必要であろう。提示のしかただけでなく、教室におけるコミュニケーションを通して、問題をお互いにどのように理解すべきかを確認しあう機会を提供することがまた必要であろう。一般のときについて式で表すことが難しければ、この問題の場合、例えば $1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$ への一般化が難しければ、家の軒数が6軒の場合のようにより具体的な問題場面にもどり、その場面で成り立つきまりをまずことばの式 $1 + 2 + \dots + (\text{家の数} - 1)$ で表すことが考えられるだろう。再度問題場面にもどりよりよく問題を理解し、事象を反省的に考察することが少なければ、やはりその大切さを認識できるような機会を提供することが必要となるであろう。

引用・参考文献

- 長崎栄三 (1992). 日米共通調査による問題解決の研究-「おはじきの配列」の問題の分析-三輪辰郎 (編著), *日本とアメリカの数学的問題解決の指導* (pp.40-57). 東京: 東洋館
- 三輪辰郎 (1992). 日米の問題解決授業の研究-共通題目による授業の実施計画と結果の概要-三輪辰郎 (編著), *日本とアメリカの数学的問題解決の指導* (pp.135-171). 東京: 東洋館

- 森本明 (1997). 聴覚障害生徒による数学の理解の諸相とその促進に向けて. *聴覚障害*52 (9), 28-33.
- 四日市章 (1991). 数学の難しさとやさしさ, *聴覚障害*, 46 (484).
- Van OERS, B.(1996). *Learning Mathematics as Meaningful Activity*. In L.E.Steffe&P.Nesher(Eds.), *Theories of Mathemaical Learning* (pp.91-114).Mahwah, NJ:L.E.A.